MATEMATYKA - POWTÓRZENIE

I. Liczby i działania.

- Przyjmujemy, że najmniejszą liczbą naturalną jest liczba 0.
- W zbiorze liczb naturalnych wyróżniamy liczby parzyste i nieparzyste.
- Liczbą pierwszą nazywamy taką liczbę naturalną, która ma tylko dwa różne dzielniki: jeden i samą siebie
- Liczba złożona ma więcej niż dwa dzielniki
- Liczby 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.
- Cechy podzielności liczb:
  Przez 2 dzielą się liczby parzyste
  Przez 3 dzielą się liczby, których suma cyfr jest podzielna przez 3
  Przez 4 dzielą się liczby, których cyfry z rzędów dziesiątek i jedności tworzą liczbę podzielną przez 4
  Przez 5 dzielą się liczby mające w rzędzie jedności cyfrę 0 lub 5
  Przez 9 dzielą się liczby, których suma cyfr jest podzielna przez 9
  Przez 10 dzielą się liczby mające w rzędzie jedności cyfrę 0
  Przez 25 dzielą się liczby będące pełnymi setkami oraz takie, których cyfry w rzędzie dziesiątek i jedności tworzą liczby 25, 50, 75
- Rozkład liczby na czynniki pierwsze – to przedstawienie tej liczby w postaci iloczynu liczb pierwszych
- NWD największy wspólny dzielnik
- NWW najmniejsza wspólna wielokrotność
- Zbiór liczb całkowitych tworzą liczby naturalne oraz liczby przeciwne do nich
- Liczbami wymiernymi nazywamy liczby, które można przedstawić w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, **$n \neq 0$**
- 1 % jakiejś wielkości to jedna setna tej wielkości
- Aby obliczyć % danej liczby, zamieniamy procent na ułamek i mnożymy przez daną liczbę
- Aby obliczyć liczbę znając wartość jej procentu, możemy obliczyć najpierw wartość 1 %, a następnie pomnożyć przez 100 lub ułożyć równanie, przyjmując za niewiadomą wartość szukanej liczby.
- Liczby niewymierne to takie liczby, których nie można przedstawić w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, **$n \neq 0$** ($\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$, π)
- Liczby wymierne i niewymierne tworzą zbiór liczb rzeczywistych
- Liczby przeciwne są położone na osi liczbowej symetrycznie względem zera.
- Odwrotnością liczby $a \neq 0$ jest liczba $\frac{1}{a}$
- Wartość bezwzględna liczby to jej odległość od zera na osi liczbowej ; $|a|$
- Działania i ich własności:
  Przemienność dodawania $a + b = b + a$
  Przemienność mnożenia $a \cdot b = b \cdot a$
  Łączność dodawania $(a + b) + c = a + (b + c)$
  Łączność mnożenia $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  Rozdzielność mnożenia względem dodawania $(a + c) \cdot b = a \cdot b + c \cdot b$
  0 w dodawaniu $0 + a = a + 0 = a$
  0 w mnożeniu $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
  1 w mnożeniu $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
  Mnożenie potęg o tej samej podstawie $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
  Dzielenie potęg o tej samej podstawie $a^m : a^n = a^{m-n}$
  Potęga potęgi $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
  Potęga iloczynu $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
  Potęga ilorazu $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
  Pierwiastek z iloczynu $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
  Pierwiastek z ilorazu $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- Kolejność wykonywania działań:
  Potęgowanie i pierwiastkowanie
  Mnożenie i dzielenie
  Dodawanie i odejmowanie
  Działania w nawiasach mają zawsze pierwszeństwo przed pozostałymi.

II. Wyrażenia algebraiczne.

- Wyrażeniem algebraicznym nazywamy wyrażenie, w którym występują liczby i litery (zmienne) połączone znakami działań i nawiasami
- Jednomiany są to iloczyny liczb i zmiennych
- Wyrazy podobne są to jednomiany różniące się współczynnikiem liczbowym
- Sumy algebraiczne to sumy jednomianów
- Jeżeli przed nawiasem występuje znak dodawania (lub nie ma żadnego znaku), opuszczamy nawias bez zmiany znaków wewnątrz nawiasu
- Jeżeli przed nawiasem występuje znak odejmowania, opuszczamy nawias, zmieniając wszystkie znaki wewnątrz nawiasu na przeciwne
- Sumy algebraiczne możemy mnożyć przez siebie, wówczas : każdy składnik pierwszej sumy mnożymy przez każdy składnik drugiej sumy
- Wzory skróconego mnożenia:

  Kwadrat sumy $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

  Kwadrat różnicy $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

  Iloczyn sumy przez różnicę $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

III. Równania, nierówności, układy równań

- Równaniem nazywamy dwa wyrażenia algebraiczne, w których występuje jedna lub więcej niewiadomych, połączone znakiem równości.
- Równaniem liniowym z jedną niewiadomą nazywamy równanie, w którym występuje tylko jedna niewiadoma i jest ona w pierwszej potędze; $ax + c = 0$ **(a≠0)**
- Rozwiązaniem równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą jest liczba, która podstawiona w miejsce niewiadomej zamienia równanie w równość prawdziwą. Liczba ta spełnia to równanie.
- Równanie, które nie ma rozwiązania nazywamy równaniem sprzecznym.
- Równanie, które jest spełnione dla każdej liczby, nazywamy równaniem tożsamościowym
- Równanie równoważne do danego otrzymamy :

  Dodając lub odejmując taką samą liczbę do obu stron równania

  Mnożąc lub dzieląc obie strony równania przez tę samą liczbę różną od zera
- Nierównością liniową z jedną niewiadomą nazywamy wyrażenie, które można przedstawić w postaci:

  $ax + b < 0, \quad ax + b > 0$ - nierówności ostre

  $ax + b \le 0, \quad ax + b \ge 0$ - nierówności nieostre gdzie **a** i **b** są dowolnymi liczbami, przy czym **a≠0.**
- Nierówność równoważną do danej otrzymamy :

  Dodając lub odejmując taką samą liczbę do obu stron nierówności

  Mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez tę samą liczbę dodatnią

  Mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez tę samą liczbę ujemną i zmieniając znak nierówności na przeciwny
- Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi ma postać $ax + by = c$, gdzie x i y są niewiadomymi, **a, b, c** są współczynnikami liczbowymi i **a≠0** lub **b≠0**
- Aby znaleźć parę liczb spełniających dane równanie, przyjmujemy za **x** dowolną wartość i obliczamy odpowiadającą mu wartość **y**
- Każde równanie liniowe z dwiema niewiadomymi można przedstawić graficznie w układzie współrzędnych. Prostą o równaniu $ax + by = c$ otrzymamy, wybierając dwa różne punkty, które spełniają to równanie.
- Nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi:

  $ax + by < c, \quad ax + by > c$ - nierówności ostre

  $ax + by \le c, \quad ax + by \ge c$ - nierówności nieostre gdzie **a, b, c** są dowolnymi liczbami, przy czym **a≠0**, **b≠0**
- Dwa równania liniowe z dwiema niewiadomymi tworzą układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Rozwiązaniem układu równań jest każda para liczb spełniająca jednocześnie oba równania układu.
- Układ równań może mieć:

  Dokładnie jedno rozwiązanie- jest to układ oznaczony

  Nieskończenie wiele rozwiązań- jest to układ nieoznaczony

  Brak rozwiązania- jest to układ sprzeczny
- Sposoby rozwiązywania układów równań:

  Metoda graficzna: rysujemy wykresy obu równań w jednym układzie współrzędnych, odczytujemy współrzędne punktów należących do obu wykresów równocześnie.

  Metoda podstawiania: z jednego równania układu wyznaczamy jedną ze zmiennych (x lub y). Wyznaczoną zmienną podstawiamy do drugiego równania, zamienia się wtedy ono w równanie z jedną niewiadomą. Z tego równania znajdujemy wartość niewiadomej. Obliczoną wartość wstawiamy do poprzedniego równania i znajdujemy wartość drugiej zmiennej.

  Metoda przeciwnych współczynników: Budujemy dwa równoważne układy równań takie, że w jednym są przeciwne współczynniki przy niewiadomej x, a w drugim przy niewiadomej y. W każdym układzie, po dodaniu równań stronami, eliminujemy jedną zmienną. Otrzymujemy dwa równania, każde z jedną niewiadomą. Rozwiązując je otrzymujemy rozwiązanie danego układu równań.

  Metoda mieszana: wyznaczamy jedną zmienną za pomocą metody przeciwnych współczynników, a drugą zmienną za pomocą metody podstawiania.

IV. Funkcje i wykresy

- Układ współrzędnych na płaszczyźnie tworzą dwie osie liczbowe prostopadłe do siebie, przecinające się w punkcie zwanym początkiem układu współrzędnych. Poziomą oś x nazywamy osią odciętych, pionową oś y – osią rzędnych.
- Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy taką zależność, która każdemu elementowi x ze zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element y ze zbioru Y. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji lub zbiorem argumentów funkcji. Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji.
- Wykresem funkcji jest zbiór wszystkich takich punktów (x,y) płaszczyzny, że x jest argumentem, a y jest wartością funkcji
- Funkcję można przedstawić na kilka sposobów: słownie, wzorem, w postaci tabelki, w postaci grafu, w postaci wykresu
- Miejscem zerowym funkcji nazywamy taki argument x, dla którego wartość funkcji wynosi 0, f(x)=0. W miejscach zerowych wykres funkcji dotyka lub przecina oś x
- $y = ax + b,$ jest to ogólny wzór funkcji liniowej gdzie liczbę **a** nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej, liczbę **b** - wyrazem wolnym.
- Dla a<0 - funkcja jest malejąca
- Dla a>0 - funkcja jest rosnąca
- Dla a=0 - funkcja jest stała
- Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b,$ mających ten sam współczynnik kierunkowy **a** i różne współczynniki **b**, są prostymi równoległymi
- Wykresy funkcji liniowych $y = ax + b,$ mających różne współczynniki kierunkowy **a** i jednakowe współczynniki **b**, są prostymi przecinającymi się w jednym punkcie **(0,b)**
- Aby wyznaczyć wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez dane punkty, podstawiamy współrzędne tych punktów w miejsce **x** i **y** do wzoru $y = ax + b,$ i rozwiązujemy układ równań o niewiadomych **a** i **b**
- Proporcjonalność prostą opisuje wzór: $y = ax.$ (dla a≠0) Liczbę **a** nazywamy współczynnikiem proporcjonalności, a wielkości **x** i **y** nazywamy wielkościami wprost proporcjonalnymi.
- Proporcjonalność odwrotną opisuje wzór: $y = \frac{a}{x},$ **a≠0** i **x≠0.** Mówimy, że wielkości **x** i **y** są odwrotnie proporcjonalne, jeżeli spełniają warunek $x \cdot y = a.$ Wykresem tej funkcji jest hiperbola.
- $y = ax^2 + b,$ (dla **a≠0**) jest to ogólny wzór funkcji kwadratowej, jej wykresem jest parabola

V. Zadania tekstowe

- Przeczytać uważnie treść
- Określić co ma być odpowiedzią i do czego dążymy podczas rozwiązywania zadania
- Wypisać dane podane w zadaniu
- Wybrać metodę rozwiązywania (algebraiczną, arytmetyczną, graficzną)
- Rozwiązać, zastanowić się nad otrzymanym wynikiem
- Sformułować odpowiedź do zadania

VI. Geometria na płaszczyźnie

- Kąt to część płaszczyzny, ograniczona dwiema półprostymi wychodzącymi z jednego punktu wraz z tymi półprostymi.
- Kąty dzielimy na :
  Wypukłe: ostre α<90°, prosty α=90°, rozwarte 90°<α<180°, półpełny α=180°
  Wklęsłe: 180°<α<360°
  Pełny: α=360°
- Kąty przyległe- to takie dwa kąty, które mają jedno wspólne ramię, a pozostałe ramiona tworzą prostą. Dwa kąty przyległe tworzą kąt półpełny (α+β=180°)
- Kąty wierzchołkowe- to takie dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek, a ramiona jednego kąta są przedłużeniami ramion drugiego kąta. Kąty wierzchołkowe mają taką samą rozwartość: α=γ, β=δ
- Jeśli dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to otrzymamy następujące kąty równe:
  Kąty naprzemianległe wewnętrznie: $\alpha_1=\gamma_2$, $\beta_1=\delta_2$
  Kąty naprzemianległe zewnętrznie: $\delta_1=\beta_2$, $\gamma_1=\alpha_2$
  Kąty odpowiadające: $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$, $\gamma_1=\gamma_2$, $\delta_1=\delta_2$
- Dwusieczna kąta- jest to półprosta dzieląca kąt na dwa kąty przystające.
- Symetralna odcinka- to prosta prostopadła do odcinka dzieląca go na dwa przystające odcinki. Symetralna odcina przechodzi przez jego środek.
- Prosta styczna do okręgu ma z okręgiem jeden punkt wspólny. Prosta styczna do okręgu tworzy z promieniem tego okręgu, prowadzonym do punktu styczności, kąt prosty.
- Sieczna- to prosta przecinająca okrąg w dwóch punktach.
- Kąt wpisany w okrąg to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a jego ramiona przecinają okrąg.
- Kąt środkowy w okręgu, to kąt którego wierzchołek leży w środku okręgu, a jego ramiona przecinają okrąg.
- Miara kąta środkowego jest dwa razy większa niż miara kąta wpisanego opartego na tym samym łuku: β=2α
- Wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe
- Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.
- Trójkąt jest wpisany w okrąg, a okrąg jest opisany na trójkącie, gdy wszystkie wierzchołki tego trójkąta leżą na okręgu.
- Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków tego trójkąta.

- Trójkąt jest opisany na okręgu, a okrąg jest wpisany w ten trójkąt, gdy wszystkie jego boki są styczne do okręgu.
- Środek okręgu wpisanego w trójkąt znajduje się w punkcie przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.
- Suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°
- Środkowe w trójkącie to odcinki łączące wierzchołki trójkąta ze środkami przeciwległych boków.
- Suma miar kątów wewnętrznych w czworokącie wynosi 360°
- Czworokąty i ich pola

  Kwadrat: $P = a^2$, $P = \frac{1}{2} \cdot d^2$

  Prostokąt: $P = a \cdot b$

  Równoległobok: $P = a \cdot h$

  Romb: $P = a \cdot h$, $P = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$

  Deltoid: $P = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$

  Trapez: $P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$
- Jeżeli sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe, to taki czworokąt można opisać na okręgu.
- Wielokąt jest wpisany w okrąg, a okrąg jest opisany na tym wielokącie, gdy wszystkie jego wierzchołki leżą na okręgu. Środek okręgu opisanego na wielokącie znajduje się w punkcie przecięcia symetralnych boków tego wielokąta.
- Wielokąt jest opisany na okręgu, a okrąg jest wpisany w ten wielokąt, gdy wszystkie jego boki są styczne do okręgu. Środek okręgu wpisanego w wielokąt znajduje się w punkcie przecięcia dwusiecznych kątów tego wielokąta.
- Wielokąt foremny to taki wielokąt, który ma wszystkie kąty równe i wszystkie boki tej samej długości
- Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta foremnego wynosi: $(n - 2) \cdot 180^\circ$
- W każdy wielokąt foremny można wpisać koło i można opisać na nim koło.
- Dwa wielokąty są przystające, jeżeli odpowiednie kąty są równe i odpowiednie odcinki są tej samej długości.
- Cechy przystawania trójkątów: dwa trójkąty są przystające jeżeli,

  Długości boków jednego trójkąta są równe długościom odpowiednich boków drugiego trójkąta albo

  Długości dwóch boków w jednym trójkącie są równe długościom odpowiednich boków w drugim trójkącie, a miary kątów zawartych pomiędzy tymi bokami są równe albo

  Długość jednego boku i miary kątów do niego przylegających w jednym trójkącie są równe długości odpowiedniego boku i miary kątów do niego przylegających w drugim trójkącie
- Dwa wielokąty są podobne jeżeli odpowiednie kąty są równe i odpowiednie odcinki są proporcjonalne.
- Cechy podobieństwa trójkątów: dwa trójkąty są podobne jeżeli,

  Długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków w drugim trójkącie albo

  Długości dwóch boków w jednym trójkącie są proporcjonalne do długości odpowiednich boków w drugim, a miary kątów zawarte między nimi są równe albo

  Miary kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich kątów w drugim trójkącie.
- Symetria osiowa względem prostej k nie zmienia długości odcinków i rozwartości kątów.

  Punkt P’ jest obrazem punktu P w symetrii względem prostek k, jeżeli punkty P i P’ leżą na prostej prostopadłej do prostej k po przeciwnych stronach tej prostej w takiej samej odległości od niej.

  Figury symetryczne do siebie względem prostej k mają odpowiednie odcinki jednakowej długości i odpowiednie kąty równe.
- Symetria środkowa względem punktu O nie zmienia długości odcinków i rozwartości kątów.

  Punkt P’ jest obrazem punktu P w symetrii środkowej względem punktu O (P≠O), jeżeli punkty P,O,P’ leżą na jednej prostej po przeciwnych stronach punktu O oraz długości odcinków PO i P’O są takie same.
- Obrót o kąt wokół punktu O nie zmienia długości odcinków i rozwartości kątów.

  Punkt P’ jest obrazem punktu P w obrocie wokół punktu O o kąt α, jeżeli odcinki PO i P’O są równej długości oraz $|\angle PoP'| = \alpha$

  Obrót wykonujemy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
- Jednokładnością o środku S i skali k (k≠0) nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi A przyporządkowuje punkt A’ należący do prostej SA, leżący: po tej samej stronie punktu S co punkt A, gdy k>0, oraz spełniający warunek $|SA'| = k \cdot |SA|$, po przeciwnej stronie punktu S niż punkt A, gdy k<0 oraz spełniający warunek $|SA'| = |k| \cdot |SA|$
- Jednokładność o skali k≠1 i k≠-1 zmienia długości odcinków ale nie zmienia rozwartości kątów.
- Pole koła: $P = \pi r^2$
- Obwód koła: $Obw = 2\pi r$
- Pole wycinka koła: $P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$
- Długość łuku: $\ell = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

– Twierdzenie Pitagorasa: jeżeli trójkąt jest prostokątny to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej $a^2 + b^2 = c^2$
– Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa: jeżeli w trójkącie o bokach długości a, b, c zachodzi związek: $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt ten jest prostokątny.
– Proporcje trygonometryczne:
Sinusem kata α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.
Cosinusem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.
Tangensem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α
Cotangensem kąta α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α

	30^0	**45^0**	**60^0**
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

VII. Geometria w przestrzeni

– Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany (nazywane podstawami) są wielokątami przystającymi leżącymi w dwóch różnych płaszczyznach równoległych, a ściany boczne są równoległobokami.
– Wysokością graniastosłupa jest odcinek prostopadły do podstaw, którego oba końce leżą w płaszczyznach podstaw.
– W nazwie graniastosłupa zawarta jest informacja o podstawie np., graniastosłup trójkątny ma w postawie trójkąt.
– W graniastosłupie prostym ściany boczne są prostokątami.
– W graniastosłupie prawidłowym podstawy są wielokątami foremnymi, a ściany boczne prostokątami.
– Pole powierzchni całkowitej (P_c) graniastosłupa to suma pól podstaw (P_p – pole jednej podstawy) i ścian bocznych (P_b – pole wszystkich ścian).
– $P_c = 2P_p + P_b$
– Objętość (V) graniastosłupa jest iloczynem pola jego podstawy (P_p) przez wysokość (h).
– $V = P_p \cdot h$
– Prostopadłościan to graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami.
– Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu: $P_c = 2(ab + bc + ac)$
– Objętość prostopadłościanu: $V = abc$
– Sześcian to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami. Sześcian to bryła foremna.
– Pole powierzchni całkowitej sześcianu: $P_c = 6a^2$
– Objętość prostopadłościanu: $V = a^3$
– Ostrosłup to wielościan, którego podstawa jest dowolnym wielokątem, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.
– Wysokością ostrosłupa jest odcinek prostopadły do podstawy, którego jeden koniec jest wierzchołkiem tego ostrosłupa.
– W nazwie ostrosłupa zawarta jest informacja o podstawie, np., ostrosłup trójkątny ma w podstawie trójkąt.
– W ostrosłupie prawidłowym podstawa jest wielokątem foremnym, a ściany boczne są równoramiennymi trójkątami przystającymi.
– Pole powierzchni całkowitej (P_c) ostrosłupa jest sumą jego pola podstawy (P_p) i jego pola powierzchni bocznej (P_b).
– $P_c = P_p + P_b$
– Objętość (V) ostrosłupa jest jedną trzecią iloczynu jego pola podstawy (P_p) i wysokości (h).
– $V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$
– Czworościan jest to ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami. Szczególny przypadek czworościanu to czworościan foremny, którego wszystkie ściany są jednakowymi trójkątami równobocznymi.
– Obracając figurę płaską wokół prostej (nazywanej osią obrotu), otrzymujemy figurę przestrzenną nazywaną bryłą obrotową.
– Walec to figura powstała w wyniku obracania prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z jego boków. Bok ten jest wysokością walca, a prosta nazywa się osią obrotu. Boki prostokąta prostopadłe do osi obrotu zakreślają koła, będące podstawami walca. Bok równoległy do osi obrotu tworzy powierzchnię boczną walca. Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca i prostopadły do podstawy nazywa się tworzącą walca.
– Pole powierzchni całkowitej (P_c) walca to suma pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej.
– $P_c = P_p + P_b$ $\qquad$ $P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
– Objętość walca jest iloczynem jego pola podstawy (P_p) i wysokości (h).
– $V = P_p \cdot h$ $\qquad$ $V = \pi r^2 \cdot h$

- Stożek jest figurą, która powstała w wyniku obracania trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jeden z jego przyprostokątnych. Przyprostokątna ta jest wysokością stożka. Przyprostokątna, która jest prostopadła do osi obrotu, zakreśla koło będące podstawą stożka. Przeciwprostokątna trójkąta zakreśla powierzchnię nazywaną powierzchnią boczną stożka. Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej stożka łączący wierzchołek z podstawą nazywamy tworzącą stożka.
- Pole powierzchni całkowitej (P_c) stożka jest sumą pola jego podstawy (P_p) i pola powierzchni bocznej (P_b).
- $P_c = P_p + P_b$ $\qquad P_c = \pi r^2 + \pi r l$ $\qquad P_c = \pi r^2 + \frac{\alpha}{360^\circ}\pi l^2$
- Objętość stożka to jedna trzecia iloczynu pola jego podstawy (P_p) i wysokości (h).
- $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$ $\qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
- Kula jest figurą, która powstała w wyniku obracania półkola dookoła prostej zawierającej średnicę tego półkola.
- Pole powierzchni całkowitej (P_c) kuli: $P_c = 4\pi r^2$
- Objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Dwie bryły są podobne, jeśli mają odpowiednie odcinki proporcjonalne i odpowiednie kąty przystające (podobnie jak w przypadku figur płaskich).

VIII. Zbieranie, organizowanie danych liczbowych.

- Całą serię wyników przeprowadzonego pomiaru lub obserwacji (tzw. danych) nazywamy próbą. Zawiera ona liczne i szczegółowe informacje, z których jeszcze niewiele widać. Pytania, jakie zwykle zadajemy na temat badanego zbioru – osób, zwierząt czy rzeczy – mają charakter ogólny i dotyczą całej zbiorowości, z której próba pochodzi. W statystyce badany zbiór osób, zwierząt albo przedmiotów nazywamy populacją. Aby odpowiedzieć na postawione pytania na podstawie próby, trzeba zebrane dane opracować.
- Dane trzeba przedstawić w czytelny sposób, np. w postaci tabelek lub diagramów przedstawiających liczbę i rodzaj danych, które wystąpiły w próbie.
- Tabelka – wypisujemy wszystkie wyniki w próbie i notujemy, ile razy każdy z nich się pojawił.
- Diagram słupkowy – dla każdego rodzaju danych rysujemy słupek, którego wysokość obrazuje, ile razy wynik pojawił się w próbie.
- Cechy diagramu słupkowego:
  Jest czytelny, gdy liczba poszczególnych rodzajów danych jest nieduża a częstości są raczej duże.
  Pozwala łatwo porównywać próby, o tej samej liczebności i strukturze danych (te same rodzaje danych).
  Próby o różnych liczebnościach można porównywać jedynie w sposób przybliżony, na podstawie kształtu diagramów.
- Diagram kołowy – liczebności całej próby odpowiada koło, w którym zaznaczmy wycinki o kątach odpowiadających częstościom poszczególnych rodzajów danych w całej próbie.
- Cechy diagramu kołowego:
  Jest czytelny, gdy próba składa się z kilku rodzajów danych, tzn. gdy koło dzieli się na kilka niezbyt małych wycinków.
  Pozwala zaobserwować jaką część całej próby stanowią poszczególne częstości.
  Pozwala łatwo porównywać próby o różnych liczebnościach.
  Nie można go stosować, gdy ankietowany może wybrać więcej niż jedną możliwość.
- Gdy stwierdzimy, że dana próba zawiera wiele rodzajów danych i wskutek tego diagramy kołowy i słupkowy będą nieczytelne, wówczas grupujemy zebrane dane w kilka grup i sporządzamy diagramy częstości dla danych pogrupowanych.
- Grupując dane zyskujemy czytelność prezentacji próby, ale tracimy szczegółowe informacje – zapominamy jakie były dane wyjściowe.
- Diagram łodygowo – listkowy jest innym sposobem przedstawiania danych pogrupowanych, zachowującym dane wyjściowe.
- Cechy diagramu łodygowo – listkowego:
  Jest czytelny.
  Zachowuje wszystkie dane wyjściowe.
  Umożliwia łatwe porównywanie dwóch prób, dane z drugiej próby zaznaczamy z drugiej strony tej samej łodygi.
- Liczby charakteryzujące próbę:
- Średnia arytmetyczna – to liczba uzyskana przez dodanie wszystkich wyników z próby i podzielenie tej sumy przez liczebność próby $S_a = \frac{a_1 + a_2}{2}$
- Mediana – to liczba, wielkość, cecha, która w danej próbie występuje najczęściej.
- Rozstęp danych – to różnica między największą i najmniejszą liczbą w danej próbie.
- Kwartyl dolny zestawu danych – to mediana wyników znajdujących się na pozycjach niższych od pozycji mediany. Gdy liczba danych w próbie jest parzysta to kwartylem dolnym jest mediana pierwszej połowy danych uporządkowanych rosnąco.
- Kwartyl górny zestawu danych – to mediana wyników znajdujących się na pozycjach wyższych od pozycji mediany. Gdy liczba danych w próbie jest parzysta to kwartylem górnym jest mediana drugiej połowy danych uporządkowanych rosnąco.
- Średnią geometryczną dwóch liczb dodatnich a_1 i a_2 jest liczba $S_g = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$
- Średnią harmoniczną liczb dodatnich a_1 i a_2 jest liczba $S_h = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}$